▶▶ H. Construcción de triángulos

Para poder construir un triángulo es necesario conocer tres datos de todos los que lo componen (lados, ángulos, etc.). Si aplicamos la fórmula para saber el número de datos necesarios para poder determinar un polígono ($2n - 3 = N$), observamos que: **2 X 3 – 3 = 3 datos.** Sin embargo, hay algunos triángulos que, dadas sus características particulares, con menos datos puede realizarse su construcción; por ejemplo, un triángulo equilátero puede construirse sabiendo solo el valor de uno de sus lados, dado que los tres lados de un triángulo equilátero son iguales. Es decir, hay ocasiones en que los datos están implícitos dadas las características del triángulo a construir.

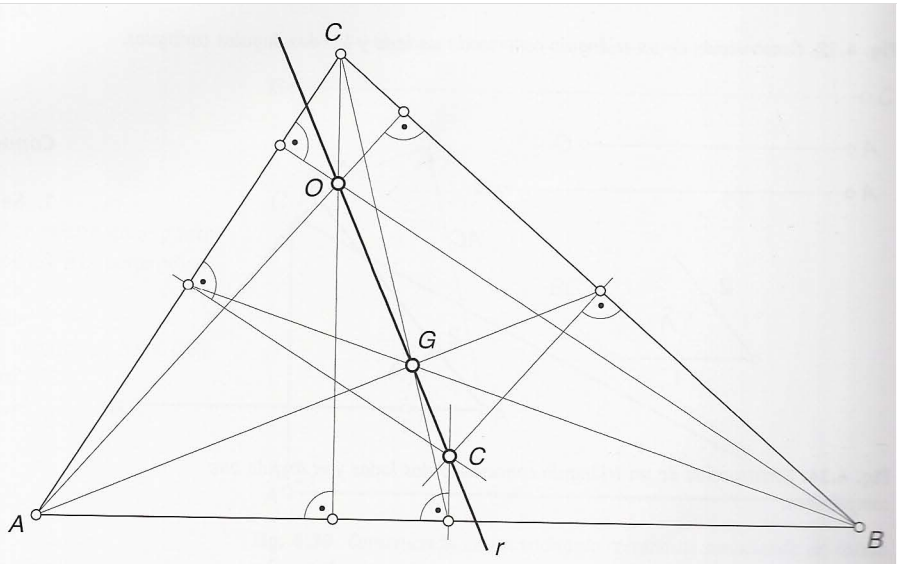


Fig. 4.31. *Recta de Euler.*

No obstante, hay una excepción: si de un triángulo conocemos solo sus tres ángulos las soluciones son infinitas, por tanto sería necesario conocer otro dato del mismo para poder definirlo. También hay que tener en cuenta que el número de soluciones en la construcción de triángulos no siempre es único, hay ocasiones donde hay más de una.

▶▶▶ Construcciones de triángulos escalenos

En este tipo de triángulos, al tener los lados y los ángulos desiguales, es necesario conocer tres datos para realizar su construcción, sean estos lados o lados y ángulos.

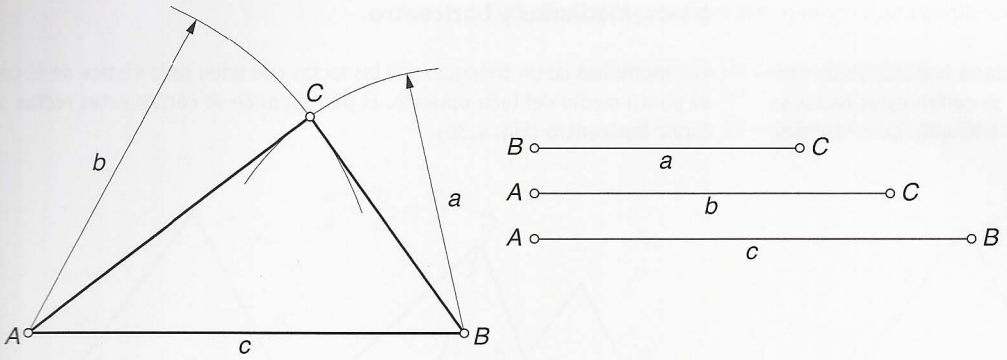


Fig. 4.32. *Construcción de un triángulo conociendo sus tres lados.*

Conociendo sus tres lados

1. Se toma como base el lado mayor $AB = c$. Con centro en el vértice A, se traza un arco con una abertura de compás igual al lado b.

2. Con centro en el vértice B, se dibuja otro arco, pero ahora con una abertura del valor del lado a. De esta forma se obtiene el vértice C, en el que se cortan esos arcos.

3. Al unir A y B con C queda construido el triángulo (Fig. 4.32).

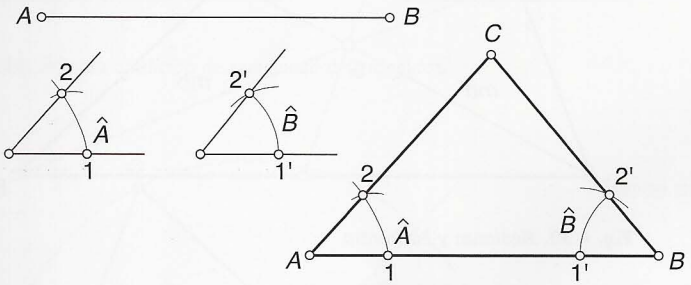


Fig. 4.33. *Construcción de un triángulo conociendo un lado y los dos ángulos contiguos.*

Conociendo un lado y los dos ángulos contiguos

1. Se dibuja un segmento AB con el valor del lado conocido.

2. Sobre A y B se dibujan ángulos iguales a los dados, $\hat{A}$ y $\hat{B}$. La intersección de los lados de los ángulos que se han construido determinan el vértice C del triángulo.

3. Para terminar de trazar el triángulo sólo hay que unir los vértices A, B y C (Fig. 4.33).

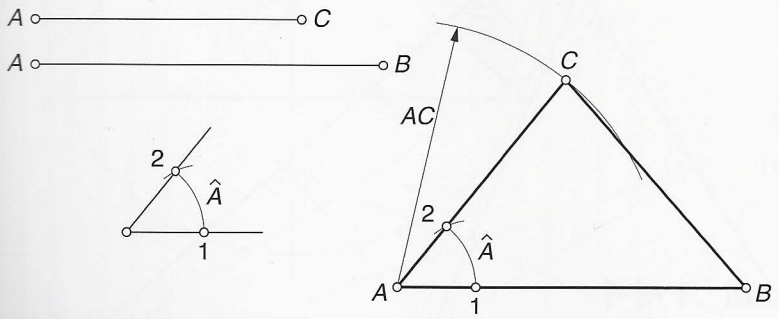


Fig. 4.34. *Construcción de un triángulo conociendo dos lados y el ángulo que comprenden.*

Conociendo dos lados y el ángulo que comprenden

1. Se traza el lado AB.

2. Sobre A se dibuja un ángulo igual al dado, $\hat{A}$. Con centro en A y radio AC se traza un arco. Donde dicho arco corte al lado del ángulo determina el vértice C del triángulo.

3. Sólo hace falta unir A, B y C para determinar el triángulo (Fig. 4.34).

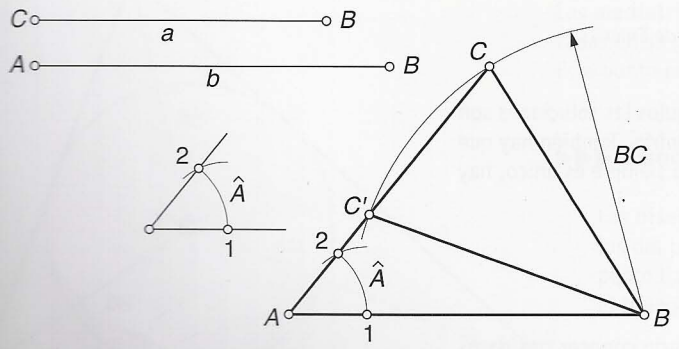


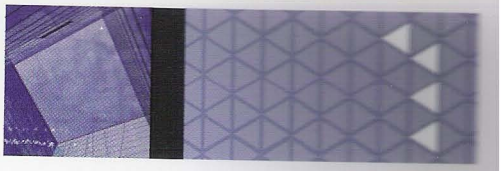
Fig. 4.35. *Construcción de un triángulo conociendo dos lados y el ángulo opuesto a ellos.*

Conociendo dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos

1. Se traza el lado AB.

2. Sobre el vértice A se dibuja el ángulo igual al dado, $\hat{A}$. Con centro en B y radio CB se traza un arco que corta al lado del ángulo anteriormente trazado en los vértices C y C'.

3. En este caso tenemos dos posibles soluciones: unir A, B y C, o unir A, B y C' (Fig. 4.35).



▶▶▶ Construcciones de triángulos rectángulos

Los triángulos rectángulos se pueden construir conociendo solo dos de todos sus datos, dado que conocemos de ellos que tienen un ángulo recto y dos agudos.

Otro aspecto importante para su construcción es conocer las **relaciones métricas** que tienen entre sus componentes. Por ejemplo, los que nos desvelan los siguientes teoremas:

- **Teorema de la altura:** la altura trazada desde el vértice opuesto a la hipotenusa es media proporcional entre los segmentos en que divide a esta última (Fig. 4.36):

$$h^2 = BH \cdot CH$$

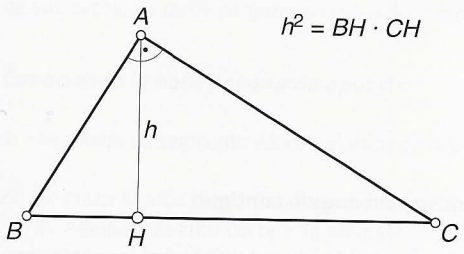


Fig. 4.36. *Teorema de la altura.*

- **Teorema del cateto:** los catetos son media proporcional entre la hipotenusa y su proyección sobre ella (Fig. 4.37):

$$BA^2 = BC \cdot BH \text{ ; y } CA^2 = CB \cdot CH$$

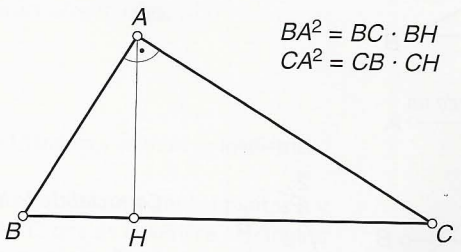


Fig. 4.37. *Teorema del cateto.*

- **Teorema de Pitágoras:** la suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa (Fig. 4.38):

$$b^2 + c^2 = a^2$$

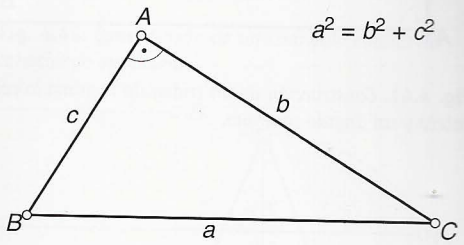


Fig. 4.38. *Teorema de Pitágoras.*

Conociendo un cateto y la hipotenusa

1. Se traza un segmento AB con el valor del cateto conocido.
2. Por el punto A se dibuja una perpendicular al segmento AB. Con centro en el punto B y radio igual al valor de la hipotenusa, se traza un arco que corta a la perpendicular en el punto C.
3. Para terminar de construir el triángulo, solo hay que unir los vértices A, B y C (Fig. 4.39).

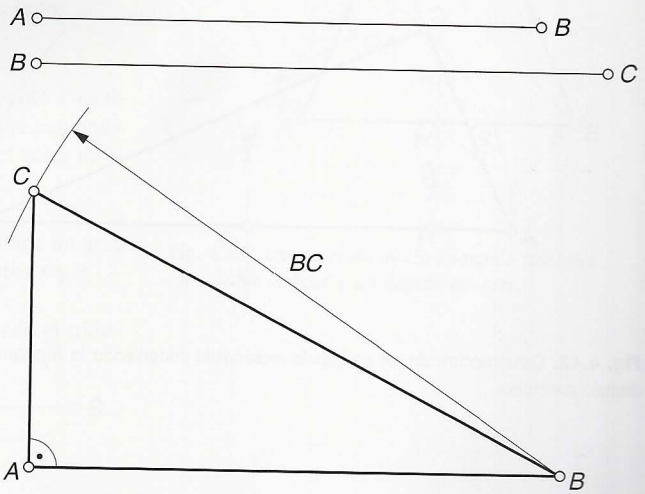


Fig. 4.39. *Construcción de un triángulo rectángulo conociendo un cateto y la hipotenusa.*

Conociendo un cateto y el ángulo opuesto

1. Se traza un segmento AB con el valor del cateto conocido, y se dibuja una perpendicular por A.
2. Se toma un punto P cualquiera de la perpendicular y se construye un ángulo $\hat{C}$ igual al dado.
3. Desde B se traza una paralela al lado del ángulo $\hat{C}$, y su intersección con la perpendicular determina el punto C. Por último, se unen los puntos A, B y C para determinar el triángulo (Fig. 4.40).

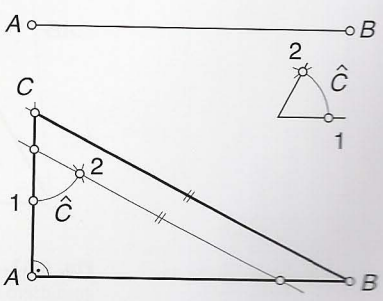


Fig. 4.40. *Construcción de un triángulo rectángulo conociendo un cateto y el ángulo opuesto.*

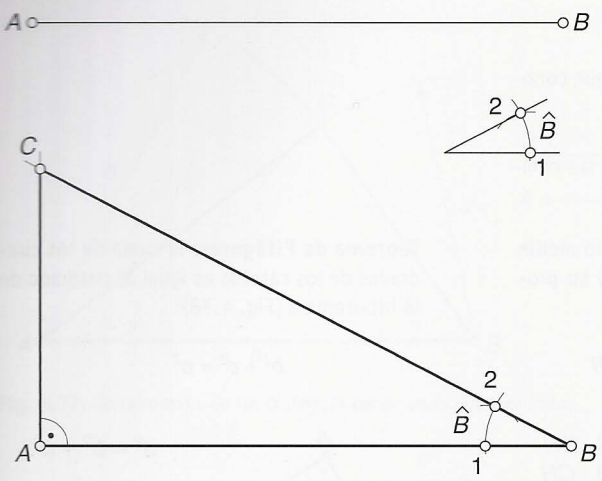


Fig. 4.41. *Construcción de un triángulo rectángulo conociendo un cateto y un ángulo contiguo.*

Conociendo un cateto y un ángulo contiguo

1. Se traza un segmento *AB* con el valor del cateto conocido, y se dibuja una perpendicular por *A*.
2. Sobre el vértice *B* se dibuja un ángulo igual al dado $\hat{B}$, se prolonga dicho lado del ángulo hasta que corte a la perpendicular trazada anteriormente en *A*, obteniendo el vértice *C*.
3. Se unen los puntos *A*, *B* y *C* y obtenemos el triángulo buscado (Fig. 4.41).

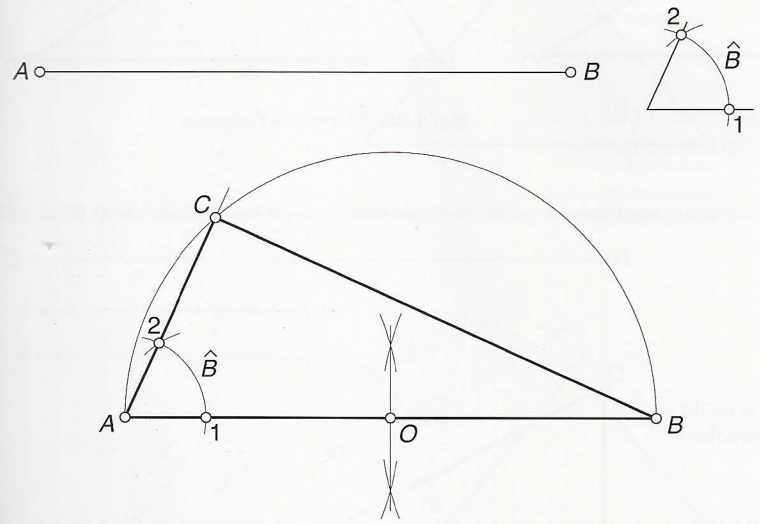


Fig. 4.42. *Construcción de un triángulo rectángulo conociendo la hipotenusa y un ángulo contiguo.*

Conociendo la hipotenusa y un ángulo contiguo

1. Se traza un segmento con el valor de la hipotenusa, y se traza una semicircunferencia desde el punto *O*, centro de la hipotenusa, (arco capaz del ángulo recto), y radio *OB*.
2. Desde *A* se dibuja el ángulo dado cuyo lado cortará al arco en el punto *C*, vértice opuesto a la hipotenusa.
3. Se unen los puntos *A*, *B* y *C* y obtenemos el triángulo buscado (Fig. 4.42).

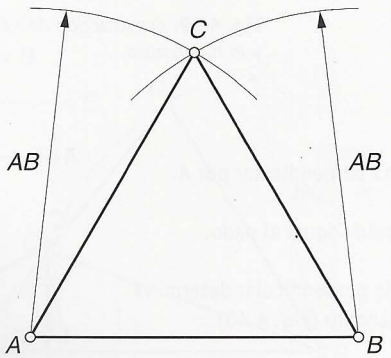


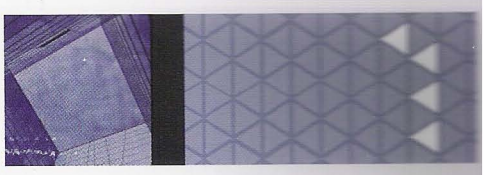
Fig. 4.43. *Construcción de un triángulo equilátero conociendo su lado.*

▶▶▶ Construcciones de triángulos equiláteros

El triángulo equilátero tiene los tres lados y los tres ángulos iguales, es decir, es un polígono regular. Por tanto, para su construcción solo se necesita un dato. En este apartado veremos dos formas de construirlo.

Conociendo su lado

1. Se dibuja un segmento *AB* con el valor del lado dado.
2. Se toman como centro, de manera sucesiva, los vértices *A* y *B*, y con radio *AB*, se trazan dos arcos que determinan el punto *C*, que es el vértice opuesto al lado *AB*.
3. Al unir el punto *C* con *A* y con *B*, se obtiene el triángulo equilátero (Fig. 4.43).



Conociendo su altura

1. Sobre una recta *r* se toma un punto *O* cualquiera por el que se traza una perpendicular a la recta *r*.
2. Sobre dicha perpendicular se lleva el valor de la altura *h* del triángulo, obteniendo el punto *C*, y se divide en tres partes iguales. Por la división 2 se traza una circunferencia de radio 2*C* que corta a *r* en *A* y *B*.
3. Para terminar de construir el triángulo sólo hay que unir los vértices *A*, *B* y *C* (Fig. 4.44).

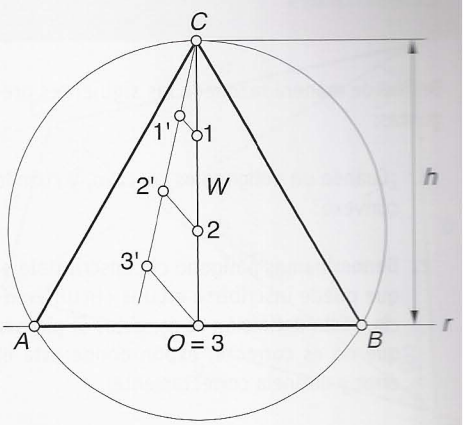


Fig. 4.44. *Construcción de un triángulo equilátero conociendo su altura.*

▶▶▶ Construcciones de triángulos isósceles

Los triángulos isósceles, al igual que los triángulos rectángulos, pueden construirse conociendo solo dos de sus datos. La razón es porque tienen dos lados y dos ángulos iguales.

Conociendo la base y el ángulo opuesto

1. Se dibuja un segmento *AB* con el valor de la base del triángulo y se traza su mediatriz.
2. Se traza el arco capaz del ángulo dado, $\hat{C}$, que como se sabe pasa por los puntos *A* y *B*. Además, el arco corta a la mediatriz en el punto *C*, que es el vértice del ángulo opuesto al lado *AB*.
3. Al unir *A* y *B* con *C* queda construido el triángulo (Fig. 4.45).

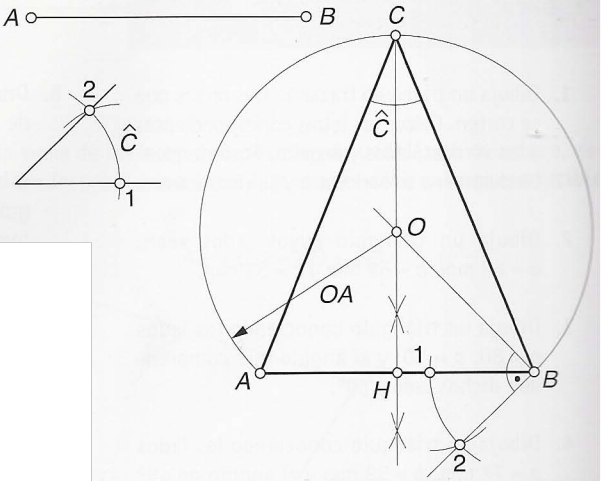


Fig. 4.45. *Construcción de un triángulo isósceles conociendo la base y un ángulo opuesto.*