

## 5. Tangencias y enlaces

### 5.1. Tangencias

## ► 5.1. Tangencias

### ►► A. Definición

Se dice que dos figuras planas son tangentes cuando tienen un solo punto en común, al que se conoce como **punto de tangencia**.

Las tangencias pueden producirse entre circunferencias y rectas, entre polígonos y rectas, entre circunferencias y polígonos, etc. Sin embargo, las tangencias más habituales en dibujo técnico son aquellas que se generan entre rectas y circunferencias, y entre circunferencias entre sí (Figs. 5.1 y 5.2).

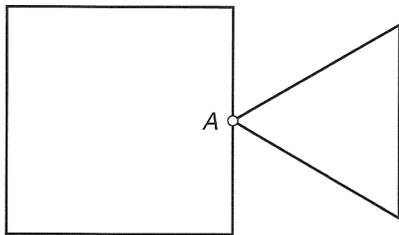


Fig. 5.1. Tangencia entre dos polígonos.

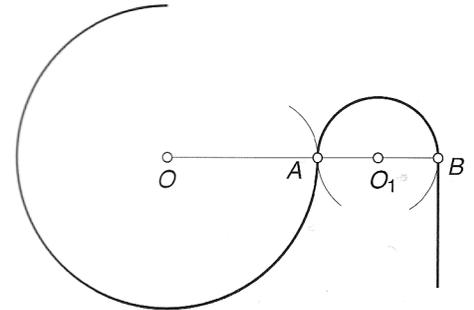


Fig. 5.2. Tangencias entre dos arcos de circunferencia y una recta.

### ►► B. Propiedades

Para solucionar con exactitud los trazados de tangencias, han de tenerse en cuenta los siguientes teoremas:

- **Primer teorema:** una recta  $r$  es tangente a una circunferencia cuando tienen entre sí solamente un punto  $M$  en común, y la recta es perpendicular al radio de la circunferencia en el punto  $M$  (Fig. 5.3).

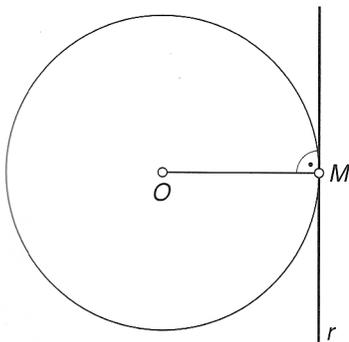


Fig. 5.3. Primer teorema.

- **Segundo teorema:** una circunferencia es tangente a dos rectas  $r$  y  $s$  que se cortan si su centro está situado en la bisectriz del ángulo que forman las rectas (Fig. 5.4).

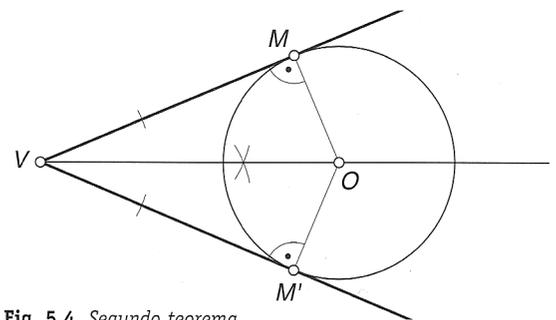


Fig. 5.4. Segundo teorema.

- **Tercer teorema:** dos circunferencias son tangentes si tienen un punto en común  $N$  alineado con los centros de la circunferencia (Fig. 5.5).

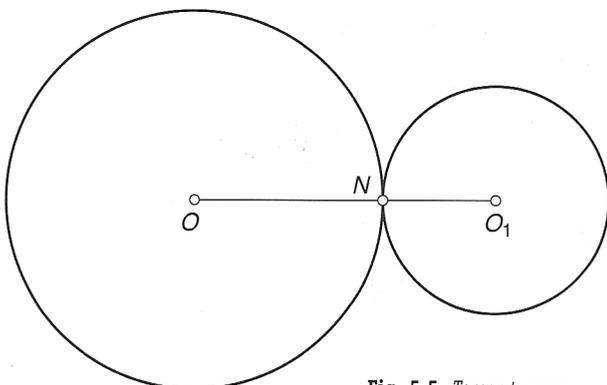


Fig. 5.5. Tercer teorema.

- **Cuarto teorema:** en dos circunferencias tangentes, si se traza un par de diámetros paralelos y se unen mediante rectas los extremos opuestos de ellos, se observa que dichas rectas de unión están alineadas con el punto de tangencia  $M$  (Fig. 5.6).

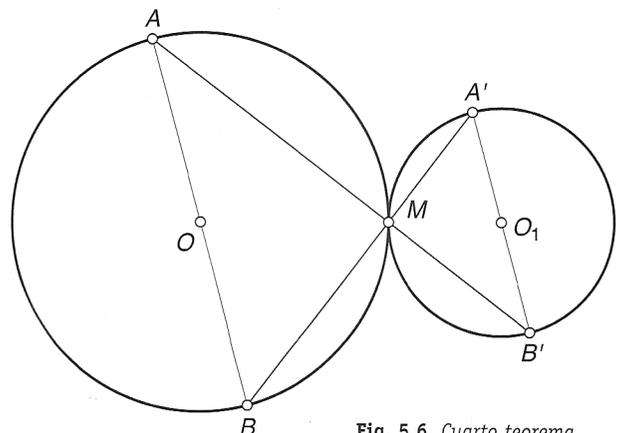
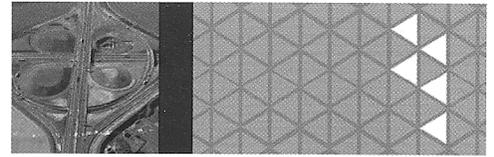


Fig. 5.6. Cuarto teorema.



### ►► C. Construcción de tangencias entre rectas y circunferencias

A continuación se desarrollan algunos de los trazados de tangencias más utilizados en dibujo técnico.

#### ►►► Tangente a una circunferencia en un punto de ella

1. Se traza el radio que une los puntos  $O$  y  $P$ , siendo este último punto por donde se ha de trazar la recta tangente a la circunferencia.
2. A continuación, se dibuja por el punto  $P$  la recta perpendicular al radio, que es la recta tangente  $r$  buscada (Fig. 5.7).

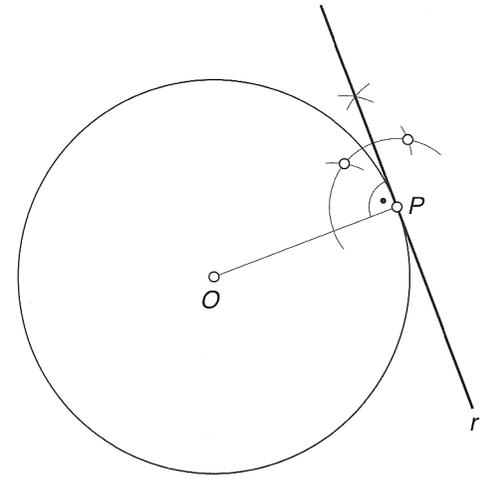


Fig. 5.7. Tangente a una circunferencia en un punto de ella.

#### ►►► Tangentes a una circunferencia desde un punto exterior a ella

1. Se une el punto  $P$  dado con el centro de la circunferencia,  $O$ , y se dibuja la mediatriz, obteniéndose así el punto  $H$ .
2. Con centro en  $H$  y radio  $HO$ , se traza un arco que corta a la circunferencia dada en los puntos  $M$  y  $M'$ , que son los puntos de tangencia.
3. Las rectas de tangencia  $r$  y  $s$  resultan de unir el punto  $P$  con  $M$  y  $M'$  (Fig. 5.8).

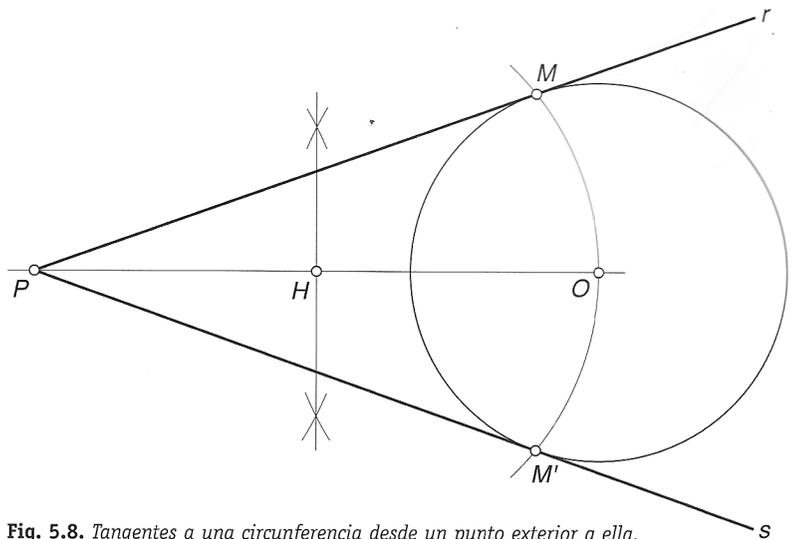


Fig. 5.8. Tangentes a una circunferencia desde un punto exterior a ella.

#### ►►► Tangentes a una circunferencia y paralelas a una dirección

1. Se traza por el centro de la circunferencia una recta  $t$  perpendicular a la dirección  $d$  dada. Esta perpendicular determina los puntos  $M$  y  $N$  de tangencia al cortar a la circunferencia.
2. Las rectas tangentes  $r$  y  $s$  son las paralelas a la dirección  $d$  que contienen a los puntos de tangencia  $M$  y  $N$ . (Fig. 5.9).

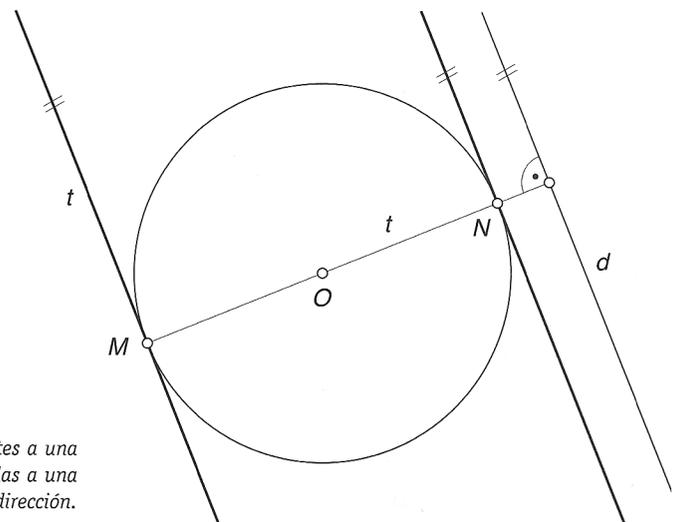


Fig. 5.9. Tangentes a una circunferencia y paralelas a una dirección.

## 5. Tangencias y enlaces

### 5.1. Tangencias

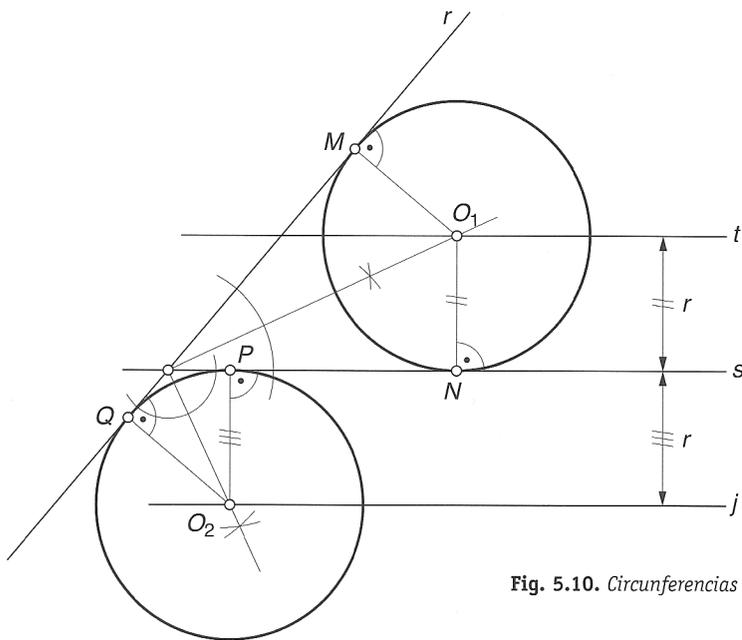


Fig. 5.10. Circunferencias de radio conocido tangentes a dos rectas convergentes.

#### ►►► Circunferencia de radio conocido tangente a dos rectas convergentes

1. Se dibujan las bisectrices de los ángulos que determinan las rectas  $r$  y  $s$ . Como puede observarse, hay dos ángulos diferentes; por tanto, se podrán dar dos soluciones a este problema.
2. Se trazan dos rectas,  $t$  y  $j$ , paralelas a una de las rectas dadas, tanto por la parte superior como por la inferior, y, separadas de ella, la medida del radio  $r$  conocido. Las intersecciones de  $t$  y  $j$  con las bisectrices determinan los centros  $O_1$  y  $O_2$  de las circunferencias que se han de trazar.
3. Los puntos de tangencia son  $M$  y  $N$ ,  $P$  y  $Q$ , respectivamente, que se hallan dibujando los radios perpendiculares a las rectas  $r$  y  $s$  (Fig. 5.10).

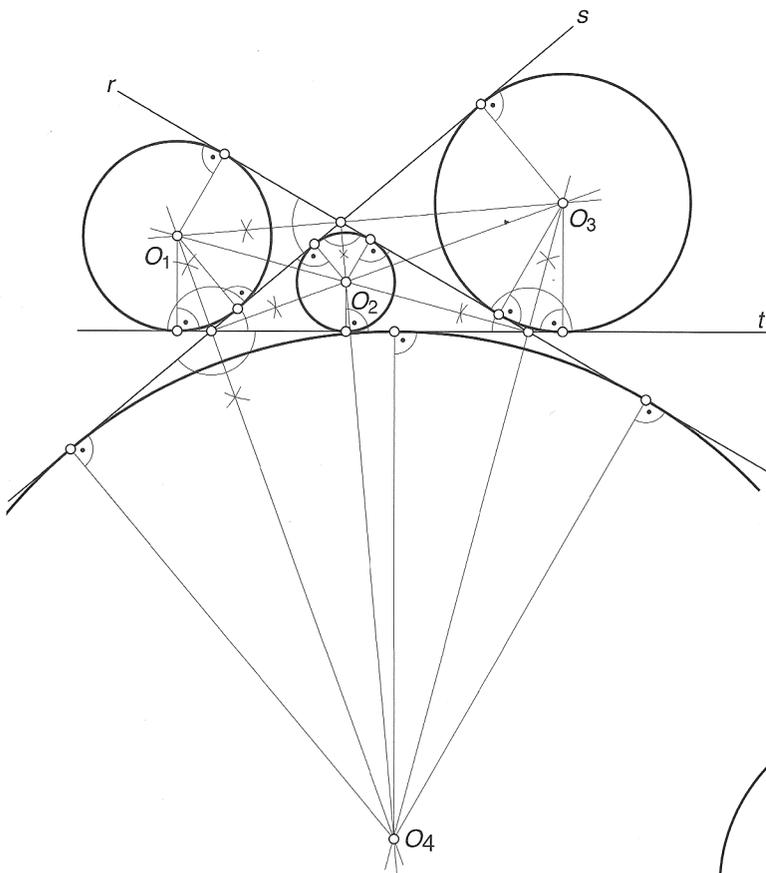


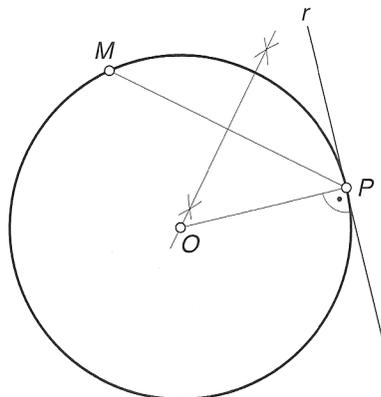
Fig. 5.11. Circunferencias tangentes a tres rectas que se cortan dos a dos.

#### ►►► Circunferencia tangente a tres rectas que se cortan dos a dos

1. Los centros de las circunferencias tangentes a las rectas  $r$ ,  $s$  y  $t$ , se encuentran en la intersección de las bisectrices de los ángulos que forman las rectas al cortarse entre sí.
2. Por tanto, en este caso, existen cuatro posibles soluciones. Al cortarse las bisectrices se obtienen los centros  $O_1$ ,  $O_2$ ,  $O_3$  y  $O_4$  de las circunferencias tangentes.
3. Los puntos de tangencia se determinan trazando, por los centros hallados, rectas perpendiculares a  $r$ ,  $s$  y  $t$  (Fig. 5.11).

#### ►►► Circunferencia que pasa por un punto dado y es tangente a una recta en otro punto, también dado

1. Sea el punto dado  $M$ , y  $P$  el punto de la recta  $r$  dada.
2. Puesto que  $M$  y  $P$  tienen que ser puntos de la circunferencia que se desea trazar, su centro tiene que encontrarse en la mediatriz de  $MP$ .

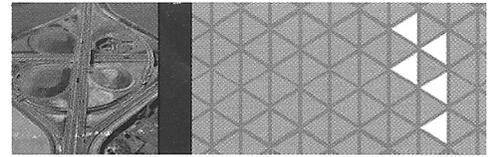


3. Al ser  $P$  el punto de tangencia en la recta  $r$ , el centro  $O$  de la circunferencia se sitúa donde la perpendicular trazada desde  $P$  a  $r$  corta a la mediatriz  $MP$  (Fig. 5.12).

Fig. 5.12. Circunferencia que pasa por un punto dado y es tangente a una recta en otro punto, también dado.

## 5. Tangencias y enlaces

### 5.1. Tangencias



#### ►►► Rectas tangentes exteriores a dos circunferencias conocidas de distinto radio

1. Se unen los puntos  $O_1$  y  $O_2$  y se halla el punto medio de  $O_1O_2$ , denominado  $H$ . Se traza una circunferencia concéntrica a la de mayor radio que sea igual a la diferencia entre los radios mayor y menor.
2. Con centro en  $H$  y radio  $HO_1$ , se traza un arco hasta cortar a la circunferencia auxiliar en  $M$  y  $M'$ . Se une  $O_1$  con  $M$  y  $M'$ , resultando así los puntos  $U$  y  $V$ .
3. Se dibujan por  $O_2$  dos radios paralelos a  $O_1V$  y  $O_1U$  para determinar los puntos  $S$  y  $T$ . Al unir  $V$  con  $T$  y  $U$  con  $S$ , se trazan las rectas tangentes  $r$  y  $l$  (Fig. 5.13).

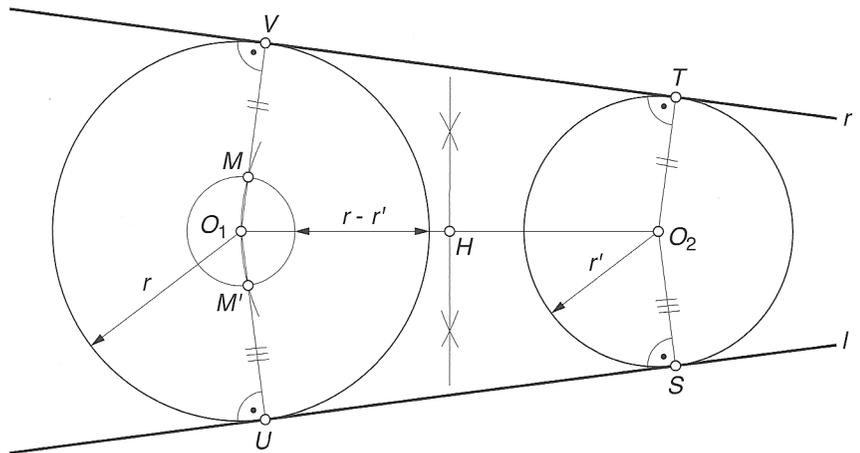


Fig. 5.13. Rectas tangentes exteriores a dos circunferencias conocidas de distinto radio.

#### ►►► Rectas tangentes interiores a dos circunferencias conocidas y de distinto radio

1. Se unen los puntos  $O_1$  y  $O_2$  y se determina el punto medio de  $O_1O_2$ , que es  $H$ . Se traza una circunferencia de radio igual a  $r$  más  $r'$  y con centro en  $O_1$ .
2. Se halla otra circunferencia con radio  $HO$  y centro en  $H$ , que corta a la anterior en los puntos  $M$  y  $M'$ .
3. Se unen los puntos  $M$  y  $M'$  con  $O_1$ , con lo que se obtienen los puntos  $V$  y  $U$  en las circunferencias. Se dibujan por  $O_1$  dos radios  $O_1V$  y  $O_1U$ , trazados en sentido contrario para conseguir los puntos  $S$  y  $T$ .
4. Basta con dibujar las rectas que contienen, respectivamente, a  $U$  y  $T$ , y a  $V$  y  $S$ , para llegar a las rectas tangentes  $r$  y  $l$  (Fig. 5.14).

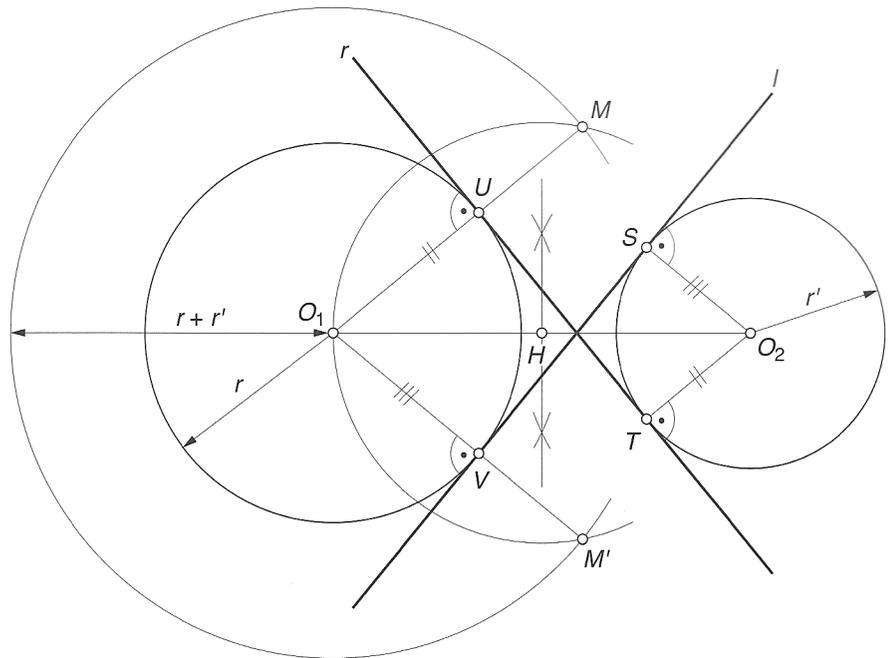


Fig. 5.14. Rectas tangentes interiores a dos circunferencias conocidas y de distinto radio.

#### ►►► D. Construcción de tangencias entre circunferencias

Las circunferencias tangentes pueden ser de dos tipos: interiores y exteriores: en las primeras, la distancia de sus centros es igual a la diferencia de sus radios; y en las segundas, la distancia de sus centros es igual a la suma de sus radios.

#### ►►► Circunferencia de radio $r$ tangente exterior a otra circunferencia conocida de centro $O_1$ en el punto $P$

1. Se prolonga un radio de la circunferencia dada,  $O_1P$ , que contenga al punto  $P$ . Se le suma el radio  $r$  conocido a partir de  $P$  y se determina el centro,  $O_2$ , de la circunferencia buscada.
2. Finalmente, se traza la circunferencia que se busca con centro en  $O_2$  y radio  $O_2P$  (Fig. 5.15).

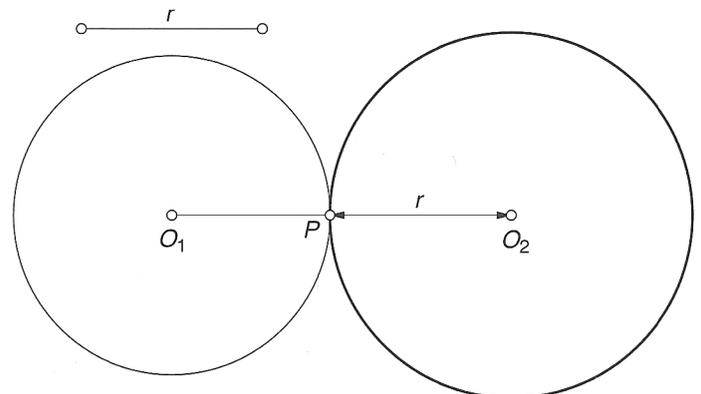


Fig. 5.15. Circunferencia tangente exterior a otra conocida en un punto.

## 5. Tangencias y enlaces

### 5.1. Tangencias

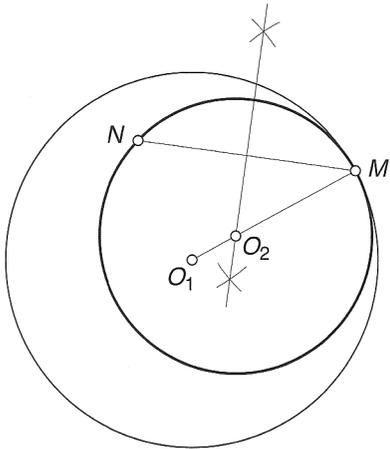


Fig. 5.16. Circunferencia tangente a otra dada en un punto y que pasa por otro interior a ella.

#### ►►► Circunferencia tangente a otra conocida en un punto $M$ y que pasa por otro punto interior $N$

1. Al ser  $M$  y  $N$  puntos de la misma circunferencia, su centro está en la mediatriz de  $MN$ .
2. Se une  $O_1$  con  $M$  y, donde corta a la mediatriz, se obtiene el centro  $O_2$  de la circunferencia, que se dibuja con radio  $O_2N$  (Fig. 5.16).

#### ►►► Circunferencia de radio $r$ conocido, tangente a otra circunferencia y a una recta dada

1. Se traza un arco con centro en  $O_1$  y que tenga como radio la suma del radio de la circunferencia dada más el radio  $r$  conocido.
2. Se traza una recta paralela a la dada que diste de ésta la medida del radio  $r$  que se conoce. La intersección de esta paralela con el arco es el centro  $O_2$  de la circunferencia buscada, y los puntos  $M$  y  $N$  son los puntos de tangencia (Fig. 5.17).

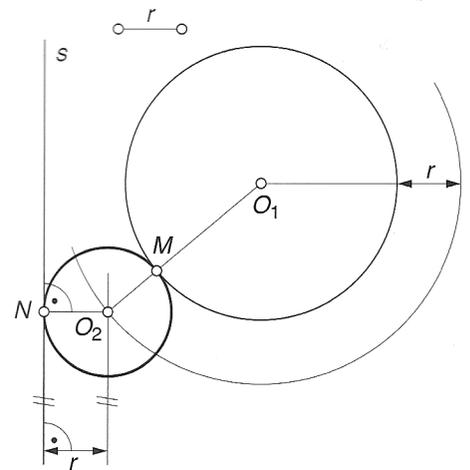


Fig. 5.17. Circunferencia de radio conocido tangente a otra circunferencia y a una recta.

#### ►►► Circunferencias tangentes dos a dos, conociendo sus centros

1. Se unen los centros  $O_1$ ,  $O_2$  y  $O_3$  conocidos de las circunferencias, determinando un triángulo.
2. Se hallan las bisectrices de los vértices del triángulo, obteniendo el punto  $P$ . Se trazan perpendiculares  $r$ ,  $s$  y  $t$  a los lados del triángulo, que contengan al punto  $P$ ; de este modo se determinan los puntos de tangencia  $A$ ,  $B$  y  $C$  y el radio de cada una de las circunferencias (Fig. 5.18).

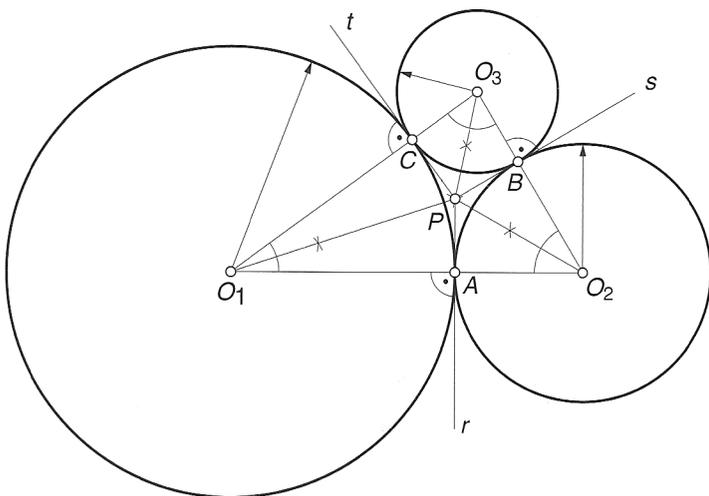


Fig. 5.18. Circunferencias tangentes dos a dos.

#### ►►► Circunferencia de radio $r$ conocido, tangente y exterior a dos circunferencias dadas

1. Desde  $O_1$  y  $O_2$  se trazan arcos cuyo radio sea igual a la suma del radio conocido  $r$  y el respectivo de la circunferencia dada, es decir,  $s+r$  y  $t+r$ . Al cortarse estos arcos, queda determinado el centro  $O_3$  de la circunferencia que hay que trazar. Uniendo  $O_3$  con  $O_1$  y  $O_2$  resultan los puntos  $M$  y  $N$  de tangencia.
2. Se dibuja la circunferencia pedida, con centro en  $O_3$  y radio  $r$  (Fig. 5.19).

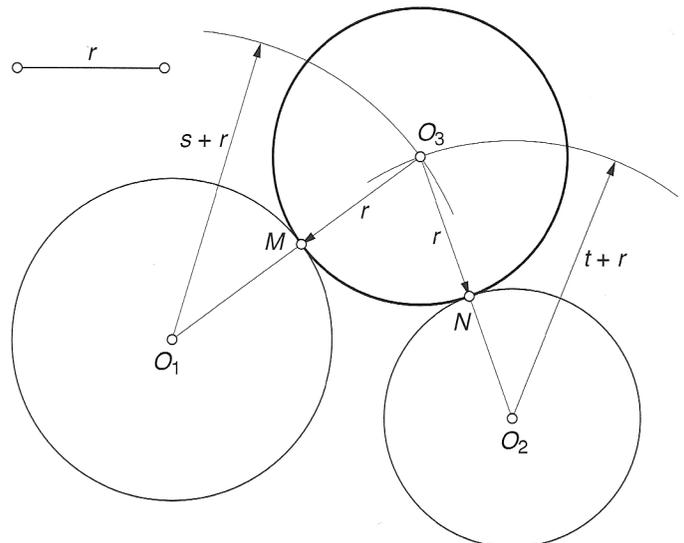
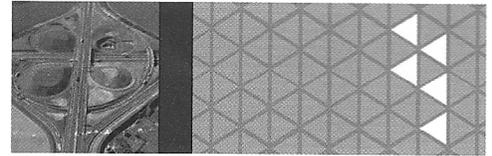


Fig. 5.19. Circunferencia tangente y exterior a dos circunferencias dadas.

## 5. Tangencias y enlaces

### 5.1. Tangencias



#### ►►► Circunferencia de radio $r$ conocido, tangente interior a dos circunferencias dadas

1. El proceso es parecido al trazado anterior. En este caso, se hace centro en  $O_1$  y se traza un arco con  $r - s$ .
2. Trazamos otro arco con centro en  $O_2$  y radio  $r - t$ . Al cortarse ambos en  $O_3$ , queda determinado el centro de la circunferencia pedida. Los puntos  $M$  y  $N$  se obtienen uniendo  $O_3$  con  $O_1$  y  $O_2$ .
3. Por último, se traza la circunferencia que se busca con centro en  $O_3$  y radio  $r$  (Fig. 5.20).

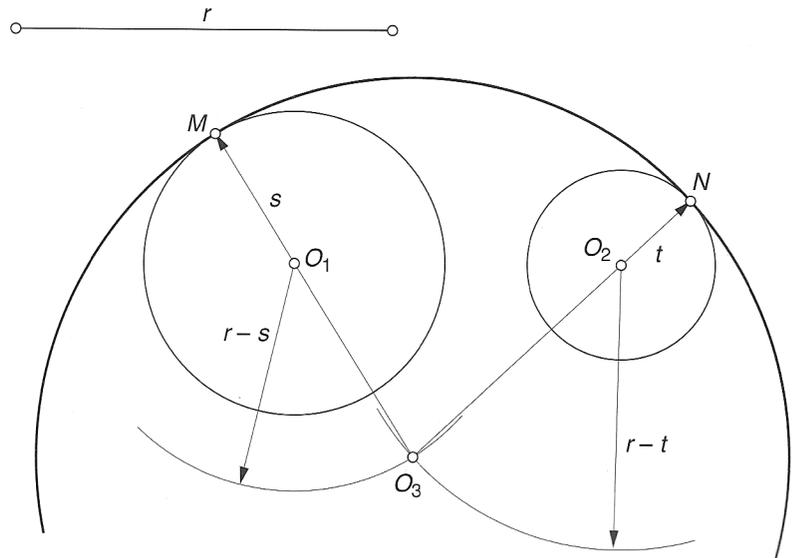


Fig. 5.20. Circunferencia tangente e interior a dos circunferencias dadas.

#### ►►► Arco de circunferencia de radio $r$ conocido, tangente a dos circunferencias dadas que corta la línea que une sus centros

1. Con centro en  $O_1$ , se dibuja un arco de radio  $r - s$ , y se toma como centro  $O_2$ ; se traza otro arco de radio  $r + t$  que corta al anterior, lo que determina un punto  $O_3$ , que es el centro del arco que se pide.
2. Al unir  $O_3$  con  $O_2$  y con  $O_1$  se obtienen los puntos  $M$  y  $N$  de tangencia.
3. Por último, se traza el arco que se quiere determinar con centro en  $O_2$  y radio  $r$  (Fig. 5.21).

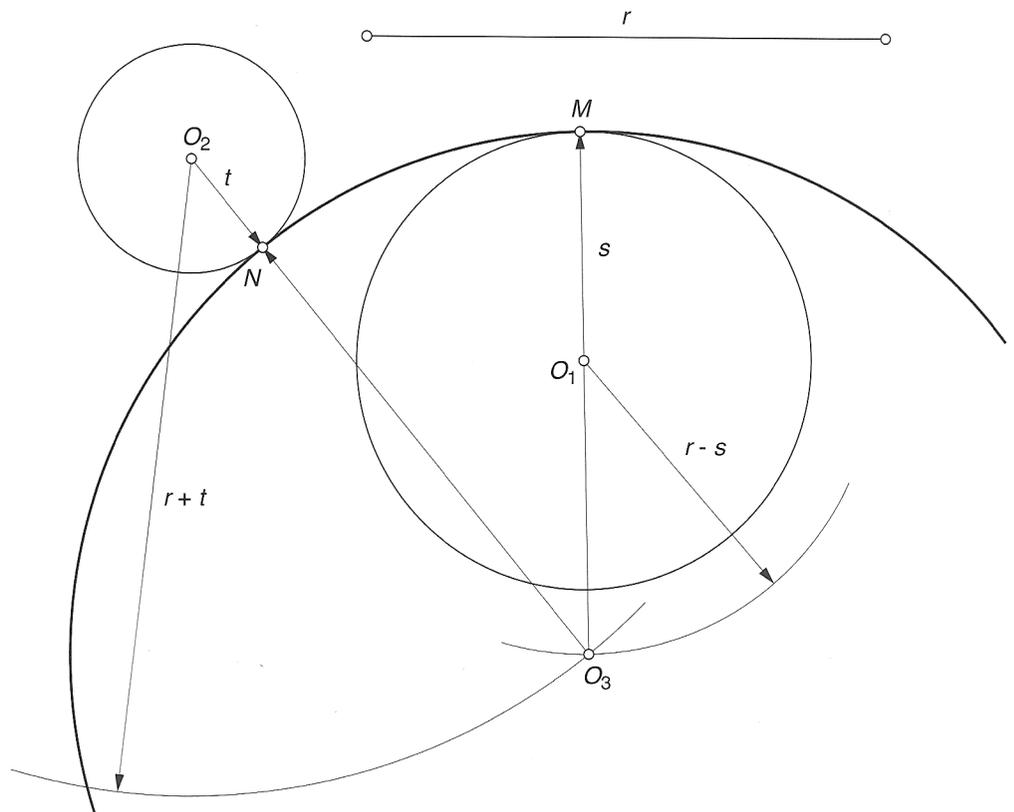


Fig. 5.21. Arco tangente a dos circunferencias que corta la línea que une sus centros.

## 5. Tangencias y enlaces

### 5.2. Enlaces

## ► 5.2. Enlaces

### ►► A. Definición

La unión armónica entre curvas y rectas o de curvas entre sí se denomina **enlace**, y esta unión debe producirse por tangencia.

### ►► B. Construcción de enlaces

El modo de operar es el siguiente:

- Se determinan los puntos de tangencia del problema planteado.
- Se traza la línea de enlace entre los puntos de tangencia. De este modo el conjunto de líneas, rectas y curvas o curvas entre sí, aparece como una sola línea continua y armónica.

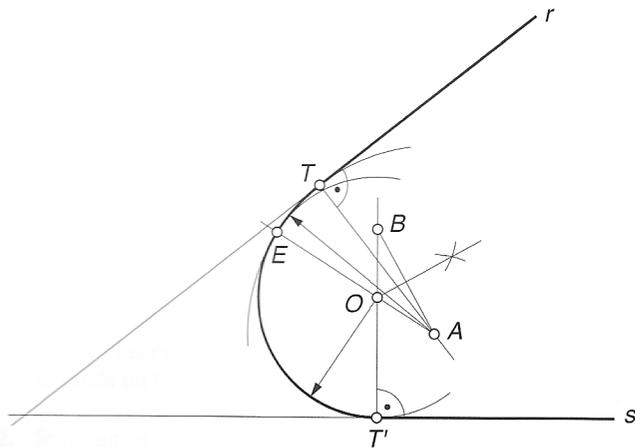


Fig. 5.22. Enlace de dos rectas oblicuas mediante dos arcos del mismo sentido y distinto radio, conociendo los puntos de tangencia.

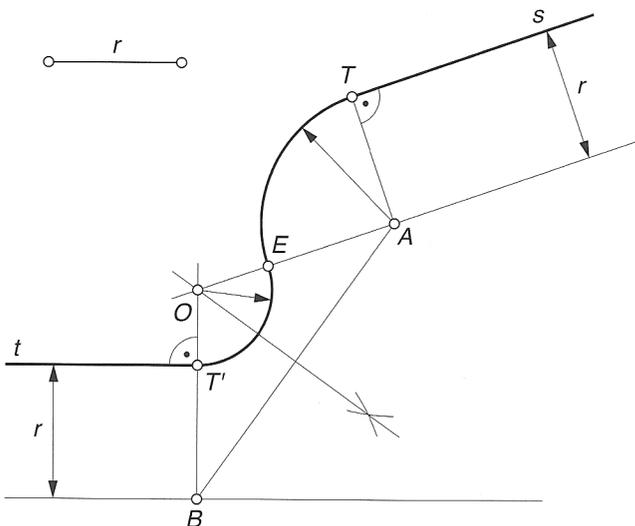


Fig. 5.23. Enlace de dos rectas oblicuas mediante dos arcos de sentido contrario.

### ►►► Enlace de dos rectas oblicuas mediante dos arcos del mismo sentido y distinto radio, conociendo los puntos $T$ y $T'$ de tangencia

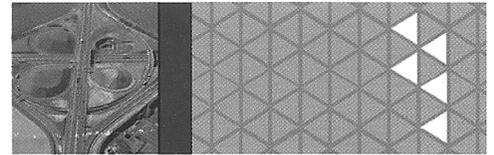
- Se trazan perpendiculares por los puntos  $T$  y  $T'$  de tangencia dados a las rectas  $r$  y  $s$ , señalando sobre ellas los puntos  $A$  y  $B$  de manera arbitraria, pero siendo igual el segmento  $AT$  que el  $BT'$ .
- Se toma el punto  $A$  como centro de uno de los dos arcos que van a unir las dos rectas. Por tanto, con centro en  $A$  y radio  $AT$  se traza un arco.
- Se dibuja el segmento  $AB$  y donde su mediatriz corta al segmento  $BT'$  se encuentra el centro  $O$  del otro arco buscado.
- Con centro en  $O$  y radio  $OT'$  se traza otro arco que corta al anterior en el punto  $E$  de tangencia entre ambos arcos. Este punto se encuentra situado en la recta que une los centros de dichos arcos (Fig. 5.22).

### ►►► Enlace de dos rectas oblicuas mediante dos arcos de sentido contrario, conociendo los puntos de tangencia $T$ y $T'$ y el radio $r$ de uno de los arcos

- Se trazan perpendiculares por los puntos de tangencia  $T$  y  $T'$  dados a las rectas  $s$  y  $t$ . Con una distancia igual a  $r$ , se trazan paralelas a  $s$  y a  $t$ , determinando los puntos  $A$  y  $B$ , como se indica en la figura.
- Se dibuja el segmento  $AB$  y, donde su mediatriz corta a la prolongación de  $T'B$  queda determinado  $O$ , centro de uno de los arcos buscados. Se une  $A$  con  $O$ , y con centro en  $A$  y radio  $AT$  se describe un arco hasta cortar al segmento  $OA$  en el punto  $E$ , punto de enlace de los arcos buscados.
- Con centro en  $O$  y radio  $OT'$ , se realiza un arco hasta el punto  $E$ , determinando de este modo el enlace pedido (Fig. 5.23).

## 5. Tangencias y enlaces

### 5.2. Enlaces



#### ►►► Enlace de dos rectas paralelas mediante dos arcos del mismo sentido y distinto radio conociendo los puntos $T$ y $T'$ de tangencia

1. Se trazan por los puntos de tangencia  $T$  y  $T'$  perpendiculares a las rectas dadas  $r$  y  $s$ . Se traza el segmento  $TT'$  y se halla su mediatriz obteniendo el punto  $A$ .
2. Por  $A$  se traza una recta paralela a las rectas  $r$  y  $s$ . Con centro en  $A$  y radio  $AT$  se describe un arco que corta a la paralela en el punto  $E$ , punto de tangencia de los dos arcos que unen las rectas  $r$  y  $s$ .
3. Por el punto  $E$  se traza una paralela a la mediatriz de  $TT'$  que corta a las perpendiculares trazadas desde  $T$  y  $T'$  a las rectas  $r$  y  $s$ , respectivamente, en los puntos  $O_1$  y  $O_2$ , centros de los arcos buscados (Fig. 5.24).

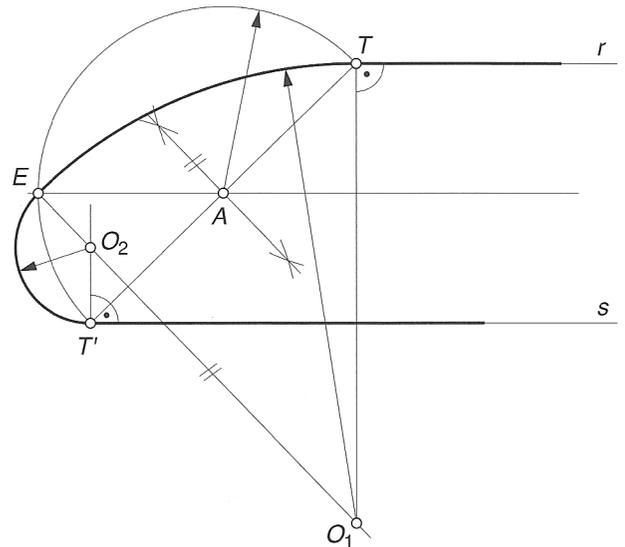


Fig. 5.24. Enlace de dos rectas paralelas mediante dos arcos del mismo sentido y distinto radio.

#### ►►► Enlace de un arco de radio conocido y una recta $s$ dada, mediante un arco del mismo sentido y de radio $r$

1. Se toma un punto  $P$  cualquiera de la recta  $s$ , y a partir de él se traza una perpendicular a  $s$ . Sobre la perpendicular, y a partir de  $P$  se lleva la magnitud de  $r$ , obteniendo así el punto  $Q$ ; a partir de él se traza una paralela a la recta  $s$ .
2. Se resta al radio  $r'$ , radio del arco conocido, el radio  $r$  del arco de unión. Se toma como medida esta diferencia para trazar un arco con centro en  $O_1$  que corta a la paralela en  $O_2$ , centro del arco buscado. Se une  $O_1$  con  $O_2$  para determinar  $E$ , punto de enlace de los dos arcos.
3. Con centro en  $O_2$  y radio  $O_2E$ , se traza el arco solución hasta unir con  $A$ , punto este hallado al trazar la perpendicular desde  $O_2$  a la recta  $s$  (Fig. 5.25).

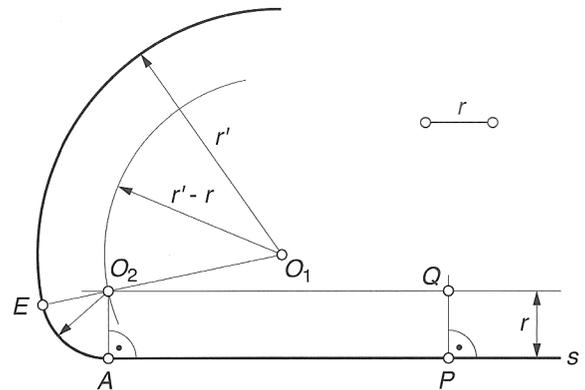


Fig. 5.25. Enlace de un arco y una recta mediante un arco del mismo sentido.

#### ►►► Enlace de dos arcos, conociendo sus radios, que se cortan en sentido contrario mediante un arco de radio $r''$

1. Los centros de los arcos conocidos son los puntos  $O_1$  y  $O_2$  y sus radios  $r$  y  $r'$ , respectivamente. Se resta a  $r$  el radio  $r''$ , radio del arco de enlace buscado, tomando la medida resultante como radio se traza desde  $O_1$  un arco.
2. Se suma a  $r'$  el radio  $r''$  y, con el valor del resultado como radio, se traza desde  $O_2$  otro arco. El punto  $O_3$  queda determinado al cortarse los arcos realizados desde  $O_1$  y  $O_2$ .
3. Se une  $O_3$  con  $O_1$  y  $O_2$ , respectivamente, y se obtienen los puntos  $T$  y  $T'$ , que son los puntos de tangencia en el enlace. Para terminar, se hace centro en  $O_3$  y, con radio  $O_3T$ , se traza un arco desde  $T$  hasta  $T'$ , para determinar el enlace pedido (Fig. 5.26).

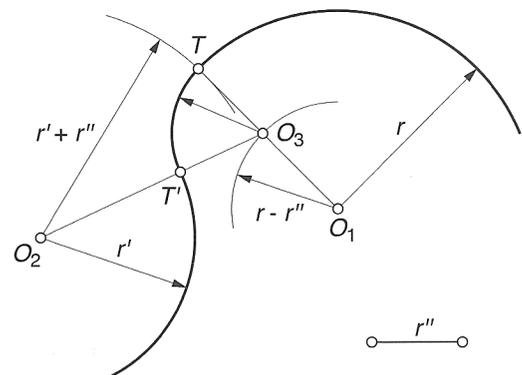


Fig. 5.26. Enlace de dos arcos que se cortan en sentido contrario.

## 5. Tangencias y enlaces

### 5.2. Enlaces

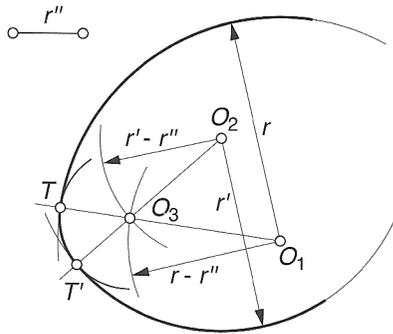


Fig. 5.27. Enlace de dos arcos que se cortan en el mismo sentido.

#### ►►► Enlace de dos arcos, conociendo sus radios, que se cortan en el mismo sentido, mediante un arco de radio $r''$

1. La construcción de este problema es similar al expuesto anteriormente; de hecho, este apartado es igual a su primero (véase en la Figura 5.27).
2. Se resta a  $r'$  el radio  $r''$ , radio del arco de enlace buscado, tomando la medida resultante como radio se traza desde  $O_2$  un arco. El punto  $O_3$  queda determinado al cortarse los arcos realizados desde  $O_1$  y  $O_2$ .
3. Se une  $O_3$  con  $O_1$  y  $O_2$ , respectivamente, y se obtienen los puntos  $T$  y  $T'$  que son los puntos de tangencia en el enlace. Para terminar se hace centro en  $O_3$  y, con radio  $O_3T$ , se traza un arco desde  $T$  hasta  $T'$ , para determinar el enlace pedido (Fig. 5.27).

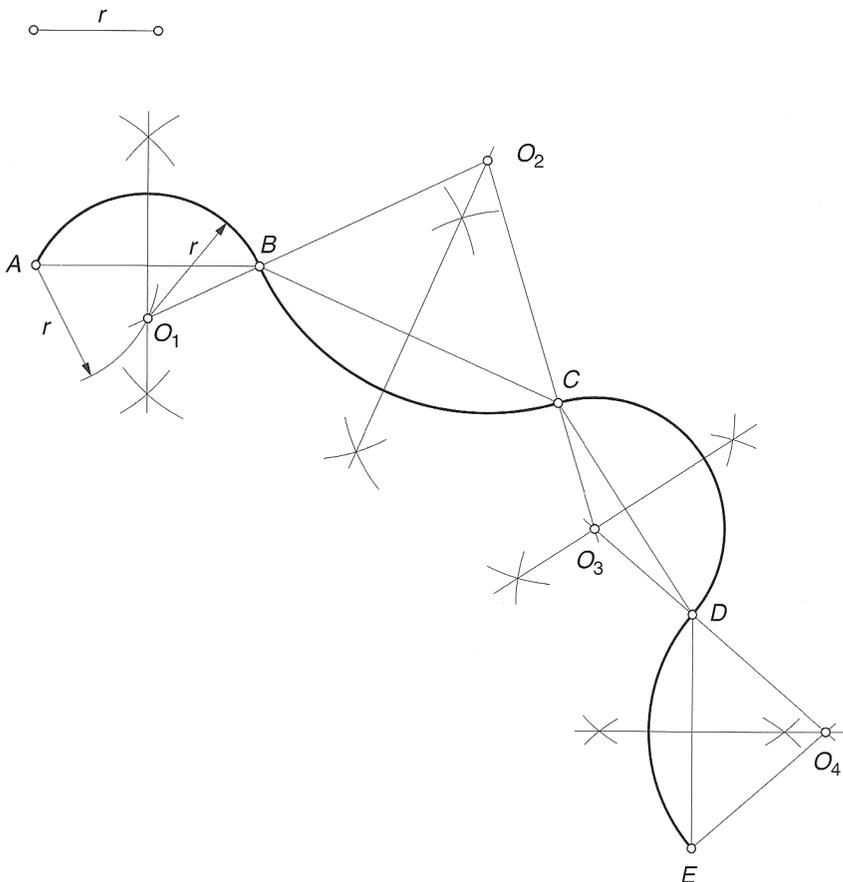


Fig. 5.28. Enlace de arcos tangentes que envuelven una línea poligonal.

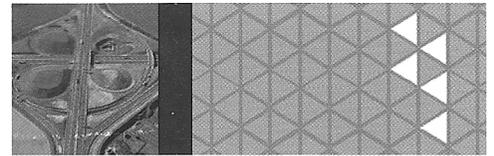
#### ►►► Enlace de una serie de arcos tangentes entre sí que envuelven una línea poligonal dada

Se parte del conocimiento de donde están los puntos  $A, B, C$ , etc., y el valor del radio  $r$  que tiene el arco  $AB$ .

1. Se halla la mediatriz del segmento  $AB$ ; con centro en  $A$  y radio  $r$  se traza un arco que corta a la mediatriz en el punto  $O_1$ . Después, con centro en  $O_1$  y radio  $r$  se traza un arco que une los puntos  $A$  y  $B$ .
2. Se unen los puntos  $B$  y  $C$  y se halla la mediatriz del segmento que corta a la recta  $O_1B$  en el punto  $O_2$ . Con centro en  $O_2$ , se traza el arco  $BC$ .
3. Se unen los puntos  $C$  y  $D$ , y se traza la mediatriz del segmento  $CD$  que corta a la recta  $O_2C$  en el punto  $O_3$ . Con centro en  $O_3$  se traza el arco  $CD$ , y así sucesivamente (Fig. 5.28).

## 5. Tangencias y enlaces

### 5.3. Molduras y arcos



## 5.3. Molduras y arcos

### A. Definición

Las **molduras** son adornos que se utilizan principalmente en obras de arquitectura. Se suelen poner a lo largo de las fachadas de edificios entre la unión de dos elementos arquitectónicos, o incluso dentro de sus estancias. Por ejemplo, en la unión de las paredes con el techo de las habitaciones, alrededor de las ventanas y puertas, etc. En algunas ocasiones sirven también como elemento de refuerzo.

La moldura, por tanto, consiste en una banda en relieve con un perfil uniforme que se repite sucesivamente. Las Figuras 5.29 a 5.32 muestran la construcción de las molduras más comunes.

Los **arcos** son también construcciones arquitectónicas de configuración generalmente curva que cubren el vano de un muro o la luz entre pilares, mandando a estos las cargas de la edificación que hay encima del vano. Las Figuras 5.33 a 5.36 recogen la construcción de varios arcos utilizados en arquitectura.

Las construcciones de molduras y de arcos que te presentamos en esta página están basadas en la utilización de enlaces, que se han llevado a cabo partiendo del trazado de circunferencias tangentes. Recuerda que los enlaces se pueden realizar con arco de circunferencia y recta, o con arcos de circunferencia.

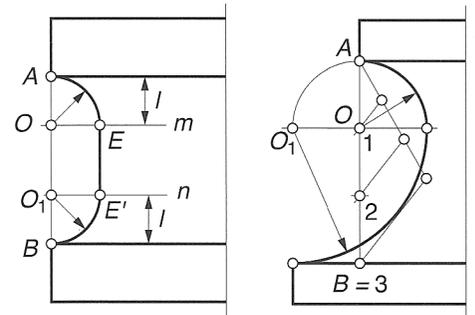


Fig. 5.29. Corona.

Fig. 5.30. Escocia.

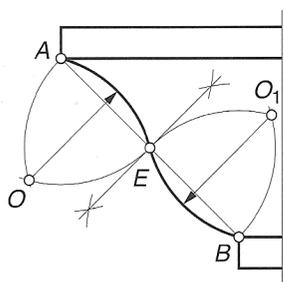


Fig. 5.31. Gola.

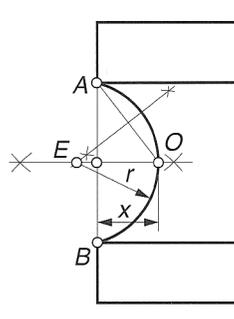


Fig. 5.32. Gorguera.

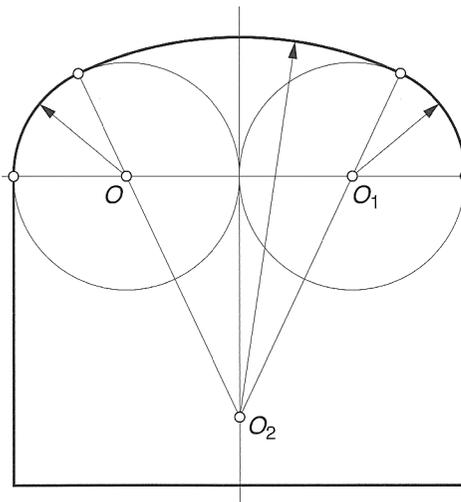


Fig. 5.33. Arco carpanel.

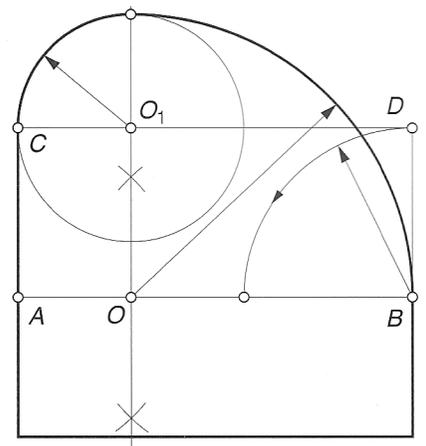


Fig. 5.34. Arco rampante.

En estos ejemplos de molduras y arcos, el punto de tangencia entre dos circunferencias se produce en el cambio de una curva a otra. Fíjate cómo están contruidos los diferentes ejemplos, son muy sencillos sus trazados; intenta reproducirlos con precisión y limpieza.

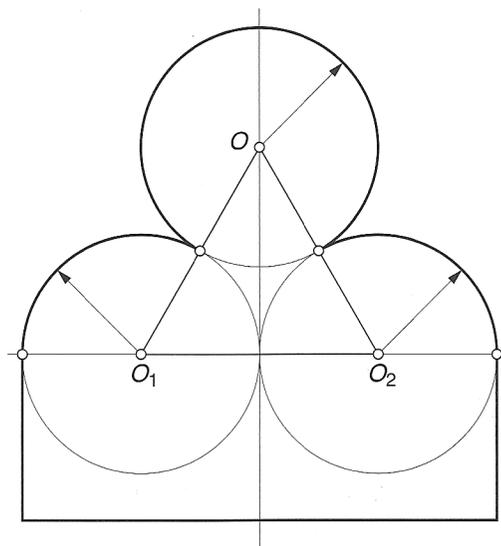


Fig. 5.35. Arco trebolado.

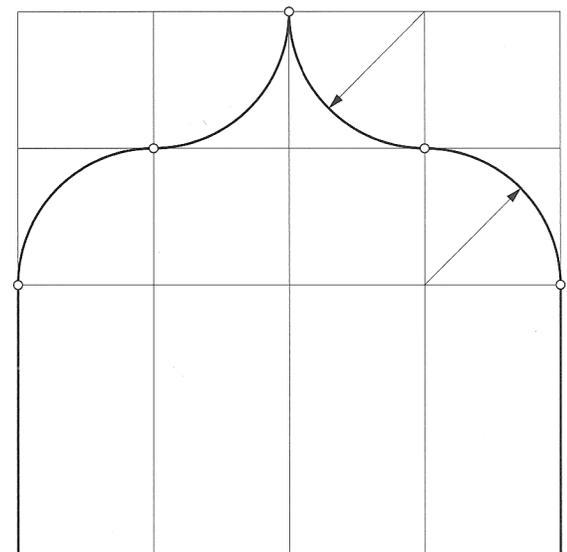


Fig. 5.36. Arco flamígero o conopial.